الموضوع الثاني

التمرين الأوّل: (04 نقاط)

عيّن الاقتراح الصّحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة ، في كل حالة من الحالات الأربع الآتية ، مع التعليل.

1) الحد العام للمتتالية العددية (u_n) المعرّفة بـ: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$ هو:

أ) $u_n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 6$ ؛ ب) $u_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ؛ جـ) $u_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{3}{2}$.

2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. مجموعة النقط M من المستوي، ذات اللاحقة z، حيث $|iz - 1 - i| = 3$ هي: أ) دائرة نصف قطرها 3 ولاحقة مركزها $1+i$.

ب) دائرة نصف قطرها 3 ولاحقة مركزها $1-i$.

جـ) دائرة نصف قطرها 3 ولاحقة مركزها $-1+i$.

3) a ، b ، c و d أعداد طبيعية غير معدومة وأصغر من أو تساوي 9.

$\overline{abcd}$ عدد طبيعي مكتوب في النظام العشري.

من أجل كل الأعداد a ، b ، c و d : يكون العدد $\overline{abcd}$ يقبل القسمة على 11 إذا وفقط إذا كان:

أ) العدد $(a - b + c - d)$ يقبل القسمة على 11.

ب) العدد $(a + b + c + d)$ يقبل القسمة على 11.

جـ) العدد $\overline{cd}$ المكتوب في النظام العشري، يقبل القسمة على 11.

4) الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. مجموعة النقط M من الفضاء ذات الإحداثيات $(x;y;z)$ حيث

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{2}{3}t - k \\ y = 2 - t + \frac{3}{2}k \\ z = -3 + 4t - 6k \end{cases} ;(t \in \mathbb{R});(k \in \mathbb{R})$$

هي: أ) المجموعة $\{A\}$ حيث $A(1;2;-3)$.

ب) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(1;2;-3)$ و $\vec{u}\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{2};-2\right)$ شعاع توجيه له.

جـ) المستوي الذي يشمل النقطة $A(1;2;-3)$ و $\vec{n}(3;-2;-1)$ شعاع ناظمي له.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^2 - 2\left(1-\sqrt{3}\right)z + 8 = 0 \qquad \text{(لاحظ أنّ: } \left(1+\sqrt{3}\right)^2 = 4 + 2\sqrt{3}\text{)}$$

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

A و B نقطتان من المستوي ، لاحقتاهما على الترتيب: $z_A = \left(1-\sqrt{3}\right) + i\left(1+\sqrt{3}\right)$ و $z_B = \overline{z_A}$.

2) أ) بيّن أنّ: $\dfrac{z_B}{z_A}=e^{-\frac{7\pi}{6}i}$.

ب) استنتج عمدة للعدد المركّب z_A.

ج) استنتج القيمة المضبوطة لكل من العددين $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

3) أ) حل ، في مجموعة الأعداد الصحيحة ، المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية: $7x-2y=1$.

ب) بيّن أنّه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة ، حلا للمعادلة $7x-24y=12$ فإن x يكون مضاعفا للعدد 12.

ج) استنتج كل الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة ، حلولا للمعادلة $7x-24y=12$.

د) عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $(z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا تماماً.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نعتبر النقطتين $A(2;0;0)$ و $B(-1;-5;-1)$.

(Δ_1) المستقيم الذي يشمل النقطة A و $\vec{u}(-1;2;-1)$ شعاع توجيه له.

(Δ_2) المستقيم المعرّف بالتمثيل الوسيطي التالي: $\begin{cases} x=-3-3t \\ y=2+2t \\ z=7+3t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

(d) المستقيم الذي يشمل النقطة B و $\vec{v}(2;5;3)$ شعاع توجيه له.

1) بيّن أنّ المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) يتقاطعان في النقطة C يُطلب تعيين إحداثياتها.

2) بيّن أنّ المستقيمين (Δ_1) و (d) ليسا من نفس المستوي.

3) أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي $(\mathcal{P})$ الذي يشمل المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2).

ب) استنتج أنّ $4x+3y+2z-8=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{P})$.

ج) تحقّق من أنّ النقطة C هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوي $(\mathcal{P})$.

4) أ) بيّن أنّه توجد نقطة وحيدة I من المستقيم (d) وتوجد نقطة وحيدة D من المستقيم (Δ_2) حيث تكون النقط A ، I و D في استقامية؛ يُطلب تعيين إحداثيات النقطتين I و D.

ب) بيّن أنّ النقطة I هي منتصف القطعة $[AD]$.

5) النقطة K مرجح الجملة المثقلة $\{(B;1),(I;2)\}$ والنقطة G المسقط العمودي للنقطة K على المستوي $(\mathcal{P})$.

أ) بيّن أنّ النقطة G هي مرجح النقط A ، C و D المرفقة بمعاملات يُطلب تعيينها.

ب) استنتج إحداثيات النقطة G.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدالة المعرّفة بـِ : $f(0)=0$ ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0[$ ، $f(x)=(x-1)e^{\frac{1}{x}}$.

$(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثّل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) ادرس استمرارية الدالة f عند 0 من اليسار.

2) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{f(x)}{x}$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

3) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

4) أ) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=0$.

ب) استنتج أنّ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $-\infty$، يُطلب تعيين معادلة له.

5) g الدالة المعرّفة على المجال $]-\infty;0[$ بـِ : $g(x)=\frac{f(x)}{x}$.

أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

6) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0[$ ، $f(x)>x$.

ب) استنتج وضعية المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

جـ) أنشئ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

7) (u_n) المتتالية المعرّفة بـِ : $u_0=-3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n<0$.

ب) حدّد اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

جـ) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متقاربة ، ثمّ عيّن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

8) m عدد حقيقي. h_m الدالة ذات المتغيّر الحقيقي x المعرّفة على المجال $]-\infty;0[$ بـِ :

$$h_m(x)=xe^{\frac{1}{x}}-mx$$

أ) احسب $h'_m(x)$ حيث h'_m هي الدالة المشتقة للدالة h_m.

ب) باستعمال المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ ، ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة $h'_m(x)=0$.

تابع للموضوع الأول — عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
ب - $f(1{,}531)\approx 0{,}002$ ؛ $f(1{,}532)\approx -0{,}001$ إذاً $f(1{,}532)<f(\alpha)<f(1{,}531)$	0,5	03,75 نقطة
4. أ - الدالة g زوجية لأن $\mathbb{R}$ متناظر بالنسبة إلى 0 و $g(-x)=g(x)$	0,25	
ب - إنشاء المنحنى $(\mathcal{C}_g)$ على المجال $[-2;2]$.	1	
5. $x\mapsto \frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{9}$ هي الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto x^2\ln x$ على المجال $]0;+\infty[$ والتي تنعدم من أجل القيمة 1.	0,5	
6. أ - $F(t)=\left(\alpha-\frac{1}{3}\alpha^3\ln\alpha+\frac{1}{9}\alpha^3\right)-\left(t-\frac{1}{3}t^3\ln t+\frac{1}{9}t^3\right)$.	0,25	
ب - من $\ln(\alpha)=\frac{1}{\alpha^2}$ ؛ $\ln(t)=\frac{1-f(t)}{t^2}$ إذاً $F(t)=\frac{-3tf(t)-t^3-6t+\alpha^3+6\alpha}{9}$.	0,25	
جـ - لدينا $\lim\limits_{x\underset{>}{\to}0}f(x)=1$ إذاً $\lim\limits_{t\underset{>}{\to}0}F(t)=\frac{\alpha^3+6\alpha}{9}$.	0,5	
7. أ - القيمة المضبوطة للعدد m حتى يكون $\mathcal{S}(m)=2\mathcal{A}$ هي: $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\alpha^3+6\alpha}{\pi}}$.	0,25	
ب - علما أنّ $3{,}140<\pi<3{,}142$ و $1{,}531<\alpha<1{,}532$ نجد: $1{,}344<m<1{,}346$.	0,25	

(الموضوع الثاني) — عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
التمرين الأوّل: (04 نقاط)		
1. الاقتراح الصحيح (أ) + التعليل (يمكن حساب u_1 في كل حالة أو $\frac{1}{2}u_n+3$ بدلالة n)	1	04 نقاط
2. الاقتراح الصحيح (ب) + التعليل ($\lvert iz-1-i\rvert=3$ معناه $\lvert z-1+i\rvert=3$)	1	
3. الاقتراح الصحيح (أ) + التعليل (يمكن استعمال خواص الموافقة بترديد 11)	1	
4. الاقتراح الصحيح (ب) + التعليل (في التمثيل الوسيطي يمكن ملاحظة أن الشعاعين مرتبطان خطيا)	1	
التمرين الثاني: (05 نقاط)		
1. $z^2-2(1-\sqrt{3})z+8=0$ معناه $z\in\left\{(1-\sqrt{3})-i(1+\sqrt{3});(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})\right\}$	1,25	03,25 نقطة
2. أ - $\frac{z_B}{z_A}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=e^{\frac{5\pi}{6}i}=e^{-\frac{7\pi}{6}i}$.	0,75	
ب - $\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)=-2\arg(z_A)=-\frac{7\pi}{6}$ ومنه $\arg(z_A)=\frac{7\pi}{12}$	0,75	
جـ - $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.	0,5	

3. أ - حلول المعادلة $7x-2y=1$ هي كل الثنائيات $(2k+1;7k+3)$ مع $k\in\mathbb{Z}$.	0,5	01,75 نقطة
ب - $7x=12(1+2y)$ ومنه x مضاعف لـ12 حسب مبرهنة غوص.	0,25	
جـ - حلول المعادلة $7x-24y=12$ هي: $x=24k+12$ و $y=7k+3$ مع $k\in\mathbb{Z}$.	0,5	
د - $n=24k+12$ مع $k\in\mathbb{N}$.	0,5	
التمرين الثالث: (04 نقاط)		
1. $C\in(\Delta_1)\cap(\Delta_2)$ ومنه $C(3;-2;1)$	0,5	04 نقاط
2. (Δ_1) و (d) غير متوازيين وغير متقاطعين وعليه فهما ليسا من نفس المستوي	0,5	
3. أ - $\begin{cases}x=3-\alpha-3\beta\\ y=-2+2\alpha+2\beta;(\alpha\in\mathbb{R});(\beta\in\mathbb{R})\\ z=1-\alpha+3\beta\end{cases}$ وهو تمثيل وسيطي للمستوي $(\mathcal{P})$.	0,5	
ب - استنتاج أنّ $4x+3y+2z-8=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{P})$.	0,25	
جـ - $C\in(\mathcal{P})$ و $\overrightarrow{BC}$ عمودي على المستوي $(\mathcal{P})$.	0,25	
4. أ - $I\in(d)\cap(\mathcal{P})$ ومنه $I(1;0;2)$ ؛ $D\in(\Delta_2)\cap(IA)$ ومنه $D(0;0;4)$.	0,75	
ب - I منتصف $[AD]$ لأن $\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{ID}$ أو $I\left(\frac{x_A+x_D}{2};\frac{y_A+y_D}{2};\frac{z_A+z_D}{2}\right)$	0,25	
5. أ - $(BC)//(KG)$ حسب طاليس في BIC نجد $\frac{IG}{IC}=\frac{1}{3}$ ومنه G مرجح $\{(C;1),(I;2)\}$ وعليه G مرجح $\{(C;1),(A;1),(D;1)\}$ أي G مركز ثقل ACD.	0,5	
ب - $G\left(\frac{5}{3};-\frac{2}{3};\frac{5}{3}\right)$	0,5	
التمرين الرابع (07 نقاط)		
1. $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}f(x)=0=f(0)$ إذن الدالة f مستمرة على يسار 0.	0,25	02,50 نقطة
2. $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}e^{\frac{1}{x}}-\lim\limits_{t\to-\infty}te^t=0$.	0,25	
التفسير الهندسي: $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نصف مماس مواز لحامل محور الفواصل في المبدأ O.	0,25	
3. أ - $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.	0,25	
ب - لكل $x\in]-\infty;0[$: $f'(x)=\left(\frac{x^2-x+1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}$ ؛ $f'(x)>0$	0,5	
f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;0[$.	0,25	
جدول تغيرات الدالة f.	0,25	
4. أ - $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{t\overset{<}{\to}0}\frac{e^t}{t}-e^t-\frac{1}{t}=\lim\limits_{t\overset{<}{\to}0}\frac{e^t-1}{t-0}-e^t=0$	0,25	
ب - المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $-\infty$ ، $y=x$ معادلة له.	0,25	

تابع للموضوع الثاني — عناصر الإجابة	العلامة: مجزأة	العلامة: مجموع
5. أ - $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=1$.	0,25	04,50 نقطة
ب - لكل x من المجال $]-\infty;0[$: $g'(x)=e^{\frac{1}{x}}\times\frac{1}{x^2}\times\frac{1}{x}$ ؛ $g'(x)<0$	0,5	
g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0[$.	0,25	
جدول تغيّرات الدالة g .	0,25	
6. أ - من أجل كل x من $]-\infty;0[$ ، $0<g(x)<1$ معناه $x<f(x)<0$	0,25	
ب - $(\mathcal{C}_f)$ فوق (Δ) ؛ $f(0)=0$ إذاً يتقاطعان في المبدأ O.	0,25	
جـ - إنشاء المنحنى $(\mathcal{C}_f)$.	0,5	
7. أ - باستعمال الاستدلال بالتراجع يكون من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n<0$.	0,75	
ب - المتتالية (u_n) متزايدة تماما لأنّ $u_n<f(u_n)<0$	0,25	
جـ - المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 0 إذن هي متقاربة نحو ℓ.	0,25	
بما أنّ f مستمرة على $]-\infty;0[$ فإن $f(\ell)=\ell$ ومنه $\ell=0$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.	0,25	
8. أ - لكل x من المجال $]-\infty;0[$ ، $h'_m(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right)-m=\frac{f(x)}{x}-m$.	0,5	
ب - $h'_m(x)=0$ تكافئ $f(x)=mx$ و $x\neq 0$ إذا كان $m\in]0;1[$ فإن المعادلة $h'_m(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]-\infty;0[$. إذا كان $m\in]-\infty;0]\cup[1;+\infty[$ فإن المعادلة $h'_m(x)=0$ لا تقبل حلا.	0,25	

ملاحظة: تقبل وتراعى جميع الطرق الصحيحة الأخرى مع التقيد التام بسلم التنقيط.